**เฉลยการบ้านครั้งที่ 10**

9.11 สิ่งที่เราต้องในการแก้ปัญหาข้อนี้คือ displacement ของ wave ใน rectangular membrane

โจทย์กำหดให้ว่าผล displacement ที่เกิดจาก superposition ของ waves ที่สะท้อนจากขอบต่าง ๆ ของ membrane เขียนได้เป็น

$$z = A_1 e^{i[\omega t-(k_1x+k_2y)]} + A_2 e^{i[\omega t-(k_1x-k_2y)]} + A_3 e^{i[\omega t-(-k_1x-k_2y)]} + A_4 e^{i[\omega t-(-k_1x+k_2y)]} \qquad (1)$$

โดยอาศัย bc แรก ที่กล่าวว่า

(1) z = 0 at x = 0;

สมการที่ (1) เขียนได้เป็น 0 = $A_1 e^{-ik_2y} + A_2 e^{ik_2y} + A_3 e^{+ik_2y} + A_4 e^{-ik_2y}$

0 = $(A_1 + A_4)e^{-ik_2y} + (A_2 + A_3)e^{ik_2y}$

สมการข้างต้นจะเป็นจริงได้เมื่อสัมประสิทธิ์แต่ละตัวเป็นศูนย์ ดังนั้น

$A_1 = -A_4$ และ $A_2 = -A_3$ (2)

(2) z = 0 at y = 0;

สมการที่ (1) เขียนได้เป็น 0 = $A_1 e^{-ik_1x} + A_2 e^{-ik_1x} + A_3 e^{+ik_1x} + A_4 e^{+ik_1x}$

0 = $(A_1 + A_2)e^{-ik_1x} + (A_3 + A_4)e^{ik_1x}$

สมการข้างต้นจะเป็นจริงได้เมื่อสัมประสิทธิ์แต่ละตัวเป็นศูนย์ ดังนั้น

$A_1 = -A_2$ และ $A_3 = -A_4$ (3)

จากสมการที่ (2) และ (3) เราพบว่า $A_1 = -A_2 = A_3 = -A_4$ (4)

ผลจากสมการที่ (4) ทำให้สมการที่ (1) เขียนได้เป็น

$$z = A_1 e^{i\omega t}\left(e^{i[-(k_1x+k_2y)]} + e^{i[-(k_1x-k_2y)]} + e^{i[-(-k_1x-k_2y)]} + e^{i[-(-k_1x+k_2y)]}\right)$$

$$= A_1 e^{i\omega t}[2\cos(k_1x + k_2y) - 2\cos(k_1x - k_2y)]$$

$$= -4A_1 e^{i\omega t}[\sin k_1x \sin k_2y] \qquad (5)$$

จาก bc ที่สอง z = 0 @ x = $a$ และ y = b

สมการที่ (5) เป็นจริงเมื่อ $k_1 a = n_1\pi \quad \rightarrow k_1 = {}^{n_1\pi}/_{a}$

และในทำนองเดียวกัน $k_2 b = n_2\pi \quad \rightarrow k_2 = {n_2\pi}/{b}$

และคำตอบของ displacement ในรูปของจำนวนจริงเขียนได้เป็น

$$z = -4A_1[\sin k_1 x \sin k_2 y]\cos\omega t$$

เมื่อ $k_1 = {n_1\pi}/{a}$ และ $k_2 = {n_2\pi}/{b}$ #

9.12 ต้องการแสดงให้เห็นว่า $N = \frac{N_0}{1-e^{-h\nu/kT}}$

เนื่องจากจำนวน oscillators ทั้งหมดหาได้จาก

$$N = \sum_n N_n = N_0 + N_0 e^{-h\nu/kT} + N_0 e^{-2h\nu/kT} + \cdots \qquad (1)$$

คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $e^{-h\nu/kT}$

$$Ne^{-h\nu/kT} = N_0 e^{-h\nu/kT} + N_0 e^{-2h\nu/kT} + N_0 e^{-3h\nu/kT} + \cdots \qquad (2)$$

(1) - (2): $N\left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) = N_0$

$$\therefore N = \frac{N_0}{1 - e^{-h\nu/kT}}$$

ต้องการแสดงให้เห็นว่า $E = \frac{N_0 h\nu e^{-h\nu/kT}}{\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)^2}$ (3)

เนื่องจาก $E = \sum_n E_n = E_1 + E_2 + \cdots$

$$= N_1 h\nu + N_2(2h\nu) + N_3(3h\nu) + \cdots$$

$$= \left(N_0 e^{-h\nu/kT}\right)h\nu + \left(2N_0 e^{-2h\nu/kT}\right)h\nu + \left(3N_0 e^{-3h\nu/kT}\right)h\nu + \cdots \qquad (4)$$

คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $e^{-h\nu/kT}$

$$Ee^{-h\nu/kT} = \left(N_0 e^{-2h\nu/kT}\right)h\nu + \left(2N_0 e^{-3h\nu/kT}\right)h\nu + \left(3N_0 e^{-4h\nu/kT}\right)h\nu + \cdots \qquad (5)$$

(3) − (5): $E - Ee^{-h\nu/kT} = \left(N_0 e^{-h\nu/kT}\right)h\nu\left(1 + e^{-h\nu/kT} + e^{-2h\nu/kT} + e^{-3h\nu/kT}\right) + \cdots$

$$\therefore E = \frac{N_0 h\nu e^{-h\nu/kT}}{\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)^2} \qquad (6)$$

ดังนั้น average energy per oscillator เขียนได้เป็น

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \frac{\frac{N_0 h\nu e^{-h\nu/kT}}{\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)^2}}{\frac{N_0}{1-e^{-h\nu/kT}}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

เมื่อ $h\nu \ll kT$ เราพบว่า $e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT$

$$\therefore \bar{\varepsilon} = kT$$ #